

適応的オートマトンのランダム媒体内における収束速度について[†]

On the Convergence Speeds of Adaptive Automata in Random Media

竹 内 昭 浩
Takeuchi, Akihiro

ABSTRACT

The study of adaptive automata aims to clarify the interactive behavior of specific capability systems within a given environment. In this paper, we first examine the adaptive behavior of “automaton $D_{n,k}$ ” in “random media” before moving on to a discussion of the convergence speed of adaptive processes which is the main purpose of the present study.

1. はじめに

これまで、適応的オートマトンの動作に関する議論は数多く行われてきたが、⁽¹⁾本稿では、適応的オートマトンがランダム媒体と呼ばれる確率的な環境内に置かれたとき如何に振る舞うかという問題を、その収束速度に注目して考察する。

ここに、ランダム媒体は、以下のように定義される。

[定義 1] ランダム媒体 $C = C(p_1, p_2, \dots, p_k)$ はオートマトン D の出力(戦略) o_i に対して p_i なる確率で出力 $s=1$ (D の損失) を呈し、 $q_i = (1 - p_i)$ なる確率で出力 $s=0$ (D の利益) を呈する。

また、この環境内で行動するオートマトンは一般に次のように定義される。

[†] 本稿は 2010 年度研修専念制度による成果の一部である。

1) Tsetlin [T-3], Fu [F-1], 竹内 [T-1], 竹内 [T-2] 等

[定義 2] オートマトン D :

$$D = (\{r\}, \{s\}, \{o\}, \Phi, F)$$

$$r(t+1) = \Phi(r(t), s(t+1))$$

$$o(t) = F(r(t))$$

ここで,

$r(t)$: 時刻 t におけるオートマトン D の内部状態

$s(t)$: 時刻 t におけるオートマトン D の入力 (環境 C の出力)

Φ : 状態推移関数 $\{r\} \times \{s\} \rightarrow \{r\}$

$o(t)$: 時刻 t におけるオートマトン D の出力 (戦略)

F : 出力関数 $\{r\} \rightarrow \{o\}$

これら二つは図 1 に示すように結合され、互いに相互作用している。

次節では $D_{n,k}$ と呼ぶオートマトンのランダム媒体 C との相互作用における動作を考察し、3. ではその収束速度を議論する。さらに、4. においては、損失の期待値と収束速度との関係を考察する。

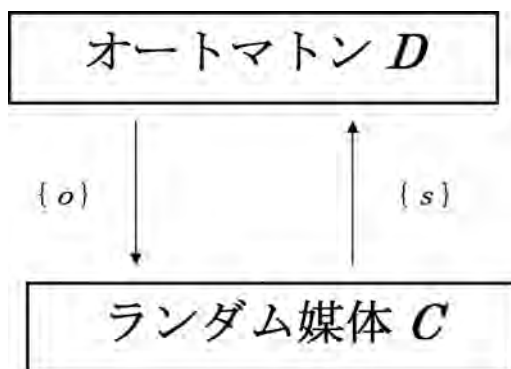


図 1

2. 適応的オートマトンの環境内での動作

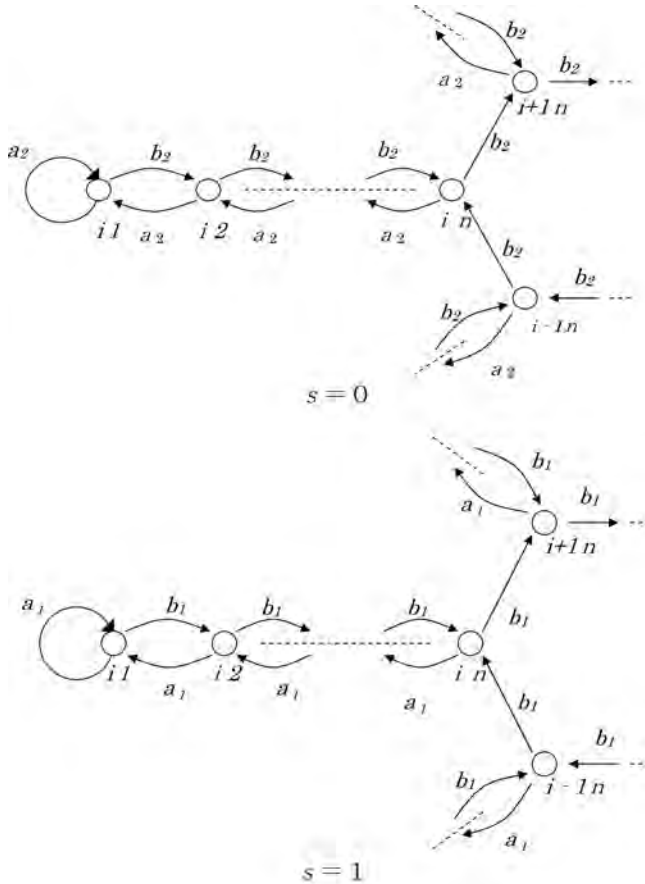
本稿で論じるオートマトン $D_{n,k}^{(2)}$ は、図 2 のような状態推移関数を持つもの

(2) 竹内 [T-1]

である。すなわち、オートマトン $D_{n,k}$ は k 個の出力（以下戦略と呼ぶ） o_i ($i=1,2,\dots,k$) を持ち、各戦略 o_i に対して n 個ずつの状態 r_{ij} ($j=1,2,\dots,n$) が用意されている。したがって $D_{n,k}$ はそれがある n 個の状態にある間は戦略 o_i をとり続け、他の状態にある間は他の戦略 o_j をとる。これを式で表すと、

$$F(r_{i1}) = F(r_{i2}) = \dots = F(r_{in}) = o_i \quad (i=1,2,\dots,k)$$

となる。また、 $k=2$ の場合の状態推移関数 ϕ はつぎの行列 \mathbf{P} で表される。



ただし $i=k$ のとき、 $k+1$ は 1 に等しい。

図 2

$$P = \begin{pmatrix} Q_1 & P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_1 & 0 & P_1 & & 0 & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & Q_1 & 0 & P_1 & \\ 0 & & & & 0 & Q_1 & 0 & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & 0 & P_2 & 0 & \\ 0 & & & & & Q_2 & P_2 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & P_2 & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & 0 & P_2 & 0 & \\ 0 & & & & & Q_2 & 0 & P_2 \\ 0 & & & & & 0 & Q_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし

$$\begin{aligned} P_i &= b_1 p_i + b_2 q_i \\ Q_i &= 1 - P_i = a_1 p_i + a_2 q_i \\ q_i &= 1 - p_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

この行列は確率行列であるから、 C と $D_{n,2}$ とによって構成される系は有限マルコフ過程であり、さらに明らかにエルゴード的である。したがって、定常状態時における $D_{n,2}$ の内部状態が r_{ij} である確率を π_{ij} とすると

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= (a_1 p_1 + a_2 q_1)(\pi_{11} + \pi_{12}) \\ \pi_{12} &= (b_1 p_1 + b_2 q_1)\pi_{11} + (a_1 p_1 + a_2 q_1)\pi_{13} \\ &\vdots \\ \pi_{1j} &= (b_1 p_1 + b_2 q_1)\pi_{1j-1} + (a_1 p_1 + a_2 q_1)\pi_{1j+1} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\pi_{1n} &= (b_1 p_1 + b_2 q_1) \pi_{1n-1} + (b_1 p_2 + b_2 q_2) \pi_{2n} \\
\pi_{21} &= (a_1 p_2 + a_2 q_2) (\pi_{21} + \pi_{22}) \\
\pi_{22} &= (b_1 p_2 + b_2 q_2) \pi_{21} + (a_1 p_2 + a_2 q_2) \pi_{23} \\
&\vdots \\
\pi_{2j} &= (b_1 p_2 + b_2 q_2) \pi_{2j-1} + (a_1 p_2 + a_2 q_2) \pi_{2j+1} \\
&\vdots \\
\pi_{2n} &= (b_1 p_2 + b_2 q_2) \pi_{2n-1} + (b_1 p_1 + b_2 q_1) \pi_{1n}
\end{aligned}$$

を得る。ここでの解の形を $\pi_{1j} = A_1 \alpha_1^{j-1}$, $\pi_{2j} = A_2 \alpha_2^{j-1}$ と仮定すると, 式 (2) の π_{1i} , π_{2i} より,

$$(1 - b_1 p_i - b_2 q_i) \alpha_i^2 - \alpha_i + (b_1 p_i + b_2 q_i) = 0 \quad (i=1,2) \quad (3)$$

なる方程式を得る。この根は,

$$\alpha_{i1} = \frac{b_1 p_i + b_2 q_i}{1 - (b_1 p_i + b_2 q_i)}, \quad \alpha_{i2} = 1 \quad (i=1,2) \quad (4)$$

であるから, K_i , L_i を任意の定数として, 一般解 π_{ii} は,

$$\pi_{ii} = K_i \alpha_{i1}^{j-1} + L_i \quad (i=1,2) \quad (5)$$

で与えられる。ところで, 式 (2) から

$$L_i = 0$$

となり, さらに式 (2) の π_{ii} , π_{in} から K_i の値が決まり, 結局定常状態時におけるオートマトン $D_{n,2}$ の損失の期待値 $\overline{M}(D_{n,2}; C)$ は,

$$\begin{aligned}
\overline{M}(D_{n,2}; C) &= \frac{\frac{p_1}{P_1''} \frac{P_1'' - Q_1''}{P_1 - Q_1} + \frac{p_2}{P_2''} \frac{P_2'' - Q_2''}{P_2 - Q_2}}{\frac{1}{P_1''} \frac{P_1'' - Q_1''}{P_1 - Q_1} + \frac{1}{P_2''} \frac{P_2'' - Q_2''}{P_2 - Q_2}} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } P_i &= b_1 p_i + b_2 q_i \\ Q_i &= 1 - P_i \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

となる。この結果はただちに戦略数が k 個の場合に一般化でき、

$$\begin{aligned} \overline{M}(D_{n,k}; C) &= \frac{\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{P_i''} \frac{P_i'' - Q_i''}{P_i - Q_i}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{P_i''} \frac{P_i'' - Q_i''}{P_i - Q_i}} \\ \text{ただし } P_i &= b_1 p_i + b_2 q_i \\ Q_i &= 1 - P_i \quad (i=1,2,\dots,k) \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。

ここで

$$P_i = \min \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$$

と置くと、もし

$$P_i \leq 1/2$$

ならば、この P_i について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{M}(D_{n,k}; C) = P_i \quad (8)$$

となる。ところで、 $P_i = b_1 p_i + b_2 q_i$ および $p_i + q_i = 1$ から、 $P_i \leq 1/2$ なる関係は、

$$p_i \left(b_1 - \frac{1}{2} \right) + q_i \left(b_2 - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad (9)$$

と変形される。 p_i , q_i はともに正であるから、

$$\begin{aligned} b_1 &\leq 1/2 \\ b_2 &\leq 1/2 \end{aligned} \quad (10)$$

ならば式 (9) なる条件は満足される。さらに、

$$P_s = p_s (b_1 - b_2) + b_2 \quad (11)$$

なる関係から $\min \{p_1, p_2, \dots, p_k\} = p_s$ に対応する P_s が $\min \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ と一致するためには、

$$b_1 - b_2 > 0 \quad (12)$$

でなければならないことがわかる。以上のことから、

$$\frac{1}{2} \geq b_1 > b_2 \geq 0 \quad (13)$$

のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{M}(D_{n,k}; C) = P_{\min} \quad (14)$$

となる。

すなわち、 b_1, b_2 が上記式 (13) を満足し、かつ十分大きな状態数を持つオートマトン $D_{n,k}$ は、損失最小という意味において最適な戦略を選ぶことがわかる。

3. オートマトンの順応速度

前節ではオートマトン $D_{n,k}$ のランダム媒体への適応能力について議論したが、本節ではこのオートマトンの環境に対する順応速度について考察する。順応速度を考察するためには、オートマトンがランダム媒体内で有限回動作した後の状況を計算する必要がある。そのため、ここでは母関数を用いることにする。⁽³⁾

幾何級数より早く増大しない関数 $f(m)$ を仮定する。このとき $f(m)$ に対し、次の $F(z)$ が一意的に定まる。これを $f(m)$ の母関数という。

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^m \quad (15)$$

ベクトル、行列の母関数は、その各要素の母関数を要素とするベクトル、行列と考えることができる。そこで時刻 t における状態確率ベクトルを $\pi(t)$ とし、状態推移関数を P と表すと、

(3) Howard [H-1], 柳井 [Y-1] 等

$$\pi(t+1) = \pi(t)P \quad (16)$$

である。 $f(m+1)$ の母関数は $(F(z)-f(0))/z$ であるから、上式より、

$$(\Pi(z) - \pi(0))/z = \Pi(z)P \quad (17)$$

ただし $\Pi(z)$ は $\pi(t)$ の母関数

となる。すると、

$$\Pi(z)(I - zP) = \pi(0) \quad (18)$$

ただし I は単位行列

となる。これより、

$$\Pi(z) = \pi(0)(I - zP)^{-1} \quad (19)$$

を得る。 $(I - zP)^{-1}$ の逆変換した式を $H(t)$ と置いて式(18)を逆変換すると、

$$\pi(t) = \pi(0)H(t) \quad (20)$$

となる。また

$$\pi(t) = \pi(0)P^t \quad (21)$$

より

$$H(t) = P^t \quad (22)$$

となる。さらにこのマルコフ過程がエルゴード的である場合には、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (I - zP)^t = 0 \quad (23)$$

の根のうち1根 z_0 は必ず $z_0 = 1$ となり、他の根 $z_i (i=1, 2, \dots, m)$ の絶対値 $|z_i|$ は $|z_i| > 1$ となる⁽⁴⁾ことが知られている。ここで各 $|z_i|$ の逆数を α_i とおく。

$$\alpha_i = 1/|z_i| \quad (24)$$

ところで、 $(I - zP)^{-1}$ を部分分数に分解すると、

$$(I - zP)^{-1} = \frac{1}{1-z} S_0 + \frac{1}{z_1 - z} S_1 + \frac{1}{z_2 - z} S_2 + \dots + \frac{1}{z_m - z} S_m \quad (25)$$

となるが、これを逆変換すると

(4) Feller [F-1]

$$H(t) = P^t = S_0 + T(t) \quad (26)$$

と書ける。ここに $T(t)$ は t が十分大きくなったとき漸近的に 0 に近づいてゆく。このときの振る舞いは $|z_i|$ の値、つまり $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ に依存するが、なかでも $\alpha_1 = \max_i \{\alpha_i\}$ に大きく依存し、この値が小さければ小さいほど、事実上そのマルコフ過程の収束速度は速くなると考えて差し支えない。⁽⁵⁾

この関係を利用して、オートマトン $D_{n,k}$ のランダム媒体内での順応速度についての考察を行う。ただし、以下の考察では $k = 2$ 、つまり戦略数が 2 個の場合についてのみ取り扱うが、 k が 2 以上についてもほぼ同様の結果が期待される。

3 - 1. $n = 1$ の場合

上述の考察に基づき、まず n が 1 の場合について考えよう。このときの推移行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 1 - b_1 p_1 - b_2 q_1 & b_1 p_1 + b_2 q_1 \\ b_1 p_2 + b_2 q_2 & 1 - b_1 p_2 - b_2 q_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。したがって

$$(I - zP) = \begin{pmatrix} 1 - (1 - b_1 p_1 - b_2 q_1)z & -(b_1 p_1 + b_2 q_1)z \\ -(b_1 p_2 + b_2 q_2)z & 1 - (1 - b_1 p_2 - b_2 q_2)z \end{pmatrix} \quad (28)$$

となり、この逆行列は

$$\begin{aligned} (I - zP)^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1 - (1 - b_1 p_1 - b_2 q_1)z}{(1 - z)(1 - (1 - B_1 - B_2)z)} & \frac{(b_1 p_1 + b_2 q_1)z}{(1 - z)(1 - (1 - B_1 - B_2)z)} \\ \frac{(b_1 p_2 + b_2 q_2)z}{(1 - z)(1 - (1 - B_1 - B_2)z)} & \frac{1 - (1 - b_1 p_2 - b_2 q_2)z}{(1 - z)(1 - (1 - B_1 - B_2)z)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 - z)} \begin{pmatrix} \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} \\ \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{(1 - (1 - B_1 - B_2)z)} \begin{pmatrix} \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} \\ \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

ただし

$$B_1 = b_1(p_1 + p_2)$$

$$B_2 = b_2(p_1 + p_2)$$

となる。式 (29) からわかるように、 $n = 1$ の場合には、 $z_0 = 1$ 以外の根は

$$z_1 = \frac{1}{(1 - B_1 - B_2)}$$

のみとなる。そこで、式 (29) を逆変換すると

$$H(m) = \begin{pmatrix} \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} \\ \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_1 + b_2 q_1}{B_1 + B_2} \\ \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} & \frac{b_1 p_2 + b_2 q_2}{B_1 + B_2} \end{pmatrix} (1 - B_1 - B_2)^m \quad (30)$$

を得る。

この結果からも読み取れるように、 B_1 , B_2 の値、つまり b_1 および b_2 の値が大きいほど収束速度が早いことがわかる。

3-2. $n > 1$ の場合

つぎに、 n が 1 より大きい場合について考察しよう。ただし、この場合一般的な解析は非常に煩雑となるため、まず $n = 3$ の場合を取り上げその数値解析⁽⁶⁾により議論を行おう。

具体的なランダム媒体 C として、 $C = C(0.8, 0.3)$ を、また b_1 , b_2 はそれぞれ $b_1 = 0.5$, $b_2 = 0.2$ としたときを、例として説明しよう。このとき推移行列 P は、

✓ (5) Feller [F-1]

(6) これらの計算には MATHEMATICA を使用した。

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} (a_1 p_1 + a_2 q_1) & (b_1 p_1 + b_2 q_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (a_1 p_1 + a_2 q_1) & 0 & (b_1 p_1 + b_2 q_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a_1 p_1 + a_2 q_1) & 0 & 0 & 0 & (b_1 p_1 + b_2 q_1) \\ 0 & 0 & 0 & (a_1 p_2 + a_2 q_2) & (b_1 p_2 + b_2 q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a_1 p_2 + a_2 q_2) & 0 & (b_1 p_2 + b_2 q_2) \\ 0 & 0 & (b_1 p_2 + b_2 q_2) & 0 & (a_1 p_2 + a_2 q_2) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.71 & 0.29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.71 & 0 & 0.29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0 & 0 & 0 & 0.29 \\ 0 & 0 & 0 & 0.56 & 0.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.56 & 0 & 0.44 \\ 0 & 0 & 0.44 & 0 & 0.56 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)
 \end{aligned}$$

となり,

$$(I - zP) = \begin{pmatrix} 1 - 0.7z & -0.29z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.71z & 1 & -0.29z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.71z & 1 & 0 & 0 & -0.29z \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 0.56z & -0.44z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.56z & 1 & -0.44z \\ 0 & 0 & -0.44z & 0 & -0.56z & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

を得る。

ここで $|I - zP| = 0$ の根を求めると,

$$z_0=1, \quad z_1=1.07471, \quad z_2=-1.33431, \quad z_3=-2.11787, \quad z_4=2.11311, \quad z_5=11.3755$$

となり, 結局 α_1 の値を少数以下第 6 位まで求めると,

$$\alpha_1 = 0.930481$$

となる。

まったく同様にして, ランダム媒体 C における p_1, p_2 を様々に変え, また b_1, b_2 の値を色々と変化させた場合の α_1 の値を求めた結果が表 1 ~ 3 である。

この結果が示すように, $n = 3$ の場合も, $n = 1$ と同様, b_1 および b_2 の値が大きいほど収束速度が早いことが読み取れる。

b_1	0.5				
b_2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$C(0.1,.0.2)$	0.998951	0.99294	0.978292	0.953007	0.915919
$C(0.1,.0.4)$	0.992694	0.983836	0.968204	0.944118	0.91039
$C(0.1,.0.6)$	0.97682	0.967726	0.953853	0.933228	0.904339
$C(0.1,.0.8)$	0.948182	0.943245	0.934754	0.920226	0.897755
$C(0.2,.0.3)$	0.996204	0.987186	0.970582	0.94534	0.910722
$C(0.2,.0.5)$	0.986125	0.975391	0.958947	0.935751	0.90501
$C(0.2,.0.7)$	0.965121	0.956087	0.942871	0.924129	0.898779
$C(0.2,.0.9)$	0.93044	0.928066	0.921948	0.910357	0.892013
$C(0.3,.0.4)$	0.990815	0.979231	0.961492	0.937014	0.905354
$C(0.3,.0.6)$	0.976505	0.964655	0.948272	0.926715	0.899459
$C(0.3,.0.8)$	0.950236	0.942143	0.930484	0.914353	0.893041
$C(0.4,.0.5)$	0.982222	0.968936	0.950968	0.928014	0.899798
$C(0.4,.0.7)$	0.963447	0.951493	0.936146	0.922765	0.893727
$C(0.4,.0.9)$	0.931906	0.925789	0.916632	0.903889	0.887123
$C(0.5,.0.6)$	0.970054	0.95616	0.938967	0.918324	0.894071
$C(0.5,.0.8)$	0.946692	0.935813	0.922518	0.906585	0.887808
$C(0.6,.0.7)$	0.954053	0.940796	0.925455	0.907935	0.888155
$C(0.6,.0.9)$	0.926029	0.917515	0.907367	0.895464	0.88171
$C(0.7,.0.8)$	0.933995	0.922765	0.91039	0.896829	0.882052
$C(0.8,.0.9)$	0.909719	0.901965	0.893727	0.884995	0.875764

表 1

b_1	0.4				0.1
b_2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.0
$C(0.1, 0.2)$	0.99945	0.994728	0.981788	0.958433	0.99999
$C(0.1, 0.4)$	0.996155	0.989501	0.976267	0.954636	0.99994
$C(0.1, 0.6)$	0.987635	0.980748	0.968992	0.950372	0.99979
$C(0.1, 0.8)$	0.972025	0.96782	0.959813	0.945609	0.9995
$C(0.2, 0.3)$	0.997994	0.991188	0.977259	0.954927	0.99997
$C(0.2, 0.5)$	0.992585	0.984581	0.971081	0.950968	0.99987
$C(0.2, 0.7)$	0.981133	0.974184	0.963104	0.946522	0.99966
$C(0.2, 0.9)$	0.96201	0.959398	0.953153	0.941584	0.999291
$C(0.3, 0.4)$	0.995074	0.986495	0.972129	0.951267	0.99991
$C(0.3, 0.6)$	0.987255	0.978435	0.965288	0.947131	0.99977
$C(0.3, 0.8)$	0.972715	0.966352	0.95659	0.942516	0.99948
$C(0.4, 0.5)$	0.990325	0.980556	0.966389	0.947436	0.99982
$C(0.4, 0.7)$	0.979893	0.970987	0.958874	0.943129	0.99961
$C(0.4, 0.9)$	0.962186	0.957203	0.949442	0.938342	0.999251
$C(0.5, 0.6)$	0.983497	0.973302	0.960015	0.943441	0.99968
$C(0.5, 0.8)$	0.970318	0.962186	0.951819	0.938967	0.9994
$C(0.6, 0.7)$	0.974383	0.964683	0.953007	0.939276	0.99948
$C(0.6, 0.9)$	0.958387	0.951991	0.944118	0.934632	0.999131
$C(0.7, 0.8)$	0.962862	0.954636	0.94534	0.934946	0.999211
$C(0.8, 0.9)$	0.948803	0.943129	0.937014	0.930449	0.998871

表 2

b_1 b_2	0.3			0.2	
	0.0	0.1	0.2	0.0	0.1
$C(0.1, 0.2)$	0.99977	0.996175	0.984882	0.99993	0.997337
$C(0.1, 0.4)$	0.998333	0.993651	0.982685	0.9995	283.2861
$C(0.1, 0.6)$	0.99458	0.989776	0.980085	0.998333	0.995362
$C(0.1, 0.8)$	0.987557	0.98431	0.977068	0.996135	0.993917
$C(0.2, 0.3)$	0.999131	0.994313	0.982907	0.99973	0.996631
$C(0.2, 0.5)$	0.996741	0.991237	0.980556	0.999001	0.995659
$C(0.2, 0.7)$	0.991601	0.986709	0.977804	0.997387	0.994402
$C(0.2, 0.9)$	0.982878	0.980527	0.974621	0.994599	0.992822
$C(0.3, 0.4)$	0.997825	0.991975	0.980796	0.99933	0.995808
$C(0.3, 0.6)$	0.994303	0.988318	0.978292	0.998223	0.994728
$C(0.3, 0.8)$	0.987674	0.983129	0.975372	0.996095	0.993325
$C(0.4, 0.5)$	0.995659	0.98912	0.978531	0.998632	0.994886
$C(0.4, 0.7)$	0.990884	0.984863	0.975876	0.997098	0.99367
$C(0.4, 0.9)$	0.982675	0.978991	0.972791	0.994431	0.992132
$C(0.5, 0.6)$	0.992497	0.985736	0.976124	0.997606	0.993838
$C(0.5, 0.8)$	0.986349	0.980854	0.973302	0.995599	0.992497
$C(0.6, 0.7)$	0.988201	0.981788	0.973568	0.996175	0.992674
$C(0.6, 0.9)$	0.980623	0.976267	0.970582	0.993651	0.991188
$C(0.7, 0.8)$	0.982685	0.977259	0.970846	0.994313	0.991375
$C(0.8, 0.9)$	0.975876	0.972129	0.967979	0.991975	0.989962

表 3

次に n を $n = 5$ として同様の表を作ったものが、表 4 ～ 6 である。

これらもまた $n = 1$, $n = 3$ の場合と同様の傾向、つまり、 b_1 および b_2 の値が大きいくほど収束速度が早いことがわかる。

以上の結果からすると、さらに大きな n についても同様の傾向が成り立つと考えて差支えない。また、当然のことであるが、 n が大きくなる、つまり状態数の増加に伴い収束速度は遅くなる。

4. 考 察

オートマトン $D_{n,k}$ は 3. で論じたように b_1 および b_2 ができるだけ大きな場合にランダム媒体へ速く適応することが確かめられた。このように状態数 n が十分大きいときにはこの b_1 および b_2 の値を大きくし適応能力を高めつつ、収束速度も上げることが可能となる。しかし状態数が不十分な場合には、 b_1 および b_2 の値がオートマトンの損失の期待値にどのような影響を与えるであろうか。最後にこのことを議論しておきたい。

まず $n = 1$ の場合を考えよう。このとき損失の期待値 $\overline{M}(D_{2,2}; C)$ は

$$\overline{M}(D_{2,2}; C) = \frac{p_1(b_1 p_2 + b_2 q_2) + p_2(b_1 p_1 + b_2 q_1)}{b_1(p_1 + p_2) + b_2(q_1 + q_2)} \quad (33)$$

となる。これを b_1 および b_2 で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{db_1} \overline{M}(D_{2,2}; C) &= \frac{-b_2(p_1 - p_2)^2}{(b_1(p_1 + p_2) + b_2(q_1 + q_2))^2} < 0 \\ \frac{d}{db_2} \overline{M}(D_{2,2}; C) &= \frac{b_1(p_1 - p_2)^2}{(b_1(p_1 + p_2) + b_2(q_1 + q_2))^2} > 0 \end{aligned} \quad (34)$$

となり、 b_1 に関しては単調減少関数、 b_2 に関しては単調増加関数となっている。

n が大きくなると、一般的な解析は非常に煩雑となる。そこで、ここでは $n = 5$ の場合を取り上げ、その数値解析による考察を行う。この結果は表 7 ～ 9 に示すとおりである。

b_1	0.5				
b_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$C(0.1, 0.2)$	0.99999	0.99972	0.997974	0.991926	0.977632
$C(0.1, 0.4)$	0.99957	0.998422	0.995411	0.988543	0.974887
$C(0.1, 0.6)$	0.996552	0.993937	0.989972	0.983391	0.9716
$C(0.1, 0.8)$	0.985756	0.983072	0.980219	0.976086	0.967736
$C(0.2, 0.3)$	0.9999	0.999201	0.996492	0.989433	0.97521
$C(0.2, 0.5)$	0.998692	0.99678	0.992871	0.985416	0.972271
$C(0.2, 0.7)$	0.992792	0.989815	0.985766	0.97948	0.968786
$C(0.2, 0.9)$	0.975991	0.974877	0.973738	0.971242	0.964702
$C(0.3, 0.4)$	0.99954	0.998094	0.994293	0.986427	0.972611
$C(0.3, 0.6)$	0.99678	0.994036	0.989413	0.98173	0.969481
$C(0.3, 0.8)$	0.98668	0.983971	0.98044	0.974953	0.965782
$C(0.4, 0.5)$	0.998522	0.996066	0.991218	0.982859	0.969829
$C(0.4, 0.7)$	0.993197	0.989844	0.984872	0.977431	0.966501
$C(0.4, 0.9)$	0.977622	0.976143	0.973881	0.9698	0.962594
$C(0.5, 0.6)$	0.996254	0.992723	0.987079	0.978665	0.966866
$C(0.5, 0.8)$	0.987284	0.983826	0.979087	0.972479	0.963335
$C(0.6, 0.7)$	0.991985	0.987645	0.981691	0.973814	0.963698
$C(0.6, 0.9)$	0.978397	0.975667	0.971931	0.966819	0.95996
$C(0.7, 0.8)$	0.984911	0.980402	0.974887	0.968242	0.960338
$C(0.8, 0.9)$	0.974232	0.970601	0.966501	0.961899	0.956764

表 4

b_1	0.4				0.1
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.0
$C(0.1, 0.2)$	0.999999	0.99984	0.998552	0.993552	0.999999
$C(0.1, 0.4)$	0.99987	0.99932	0.997466	0.992359	0.999999
$C(0.1, 0.6)$	0.998891	0.997705	0.995481	0.990815	0.999999
$C(0.1, 0.8)$	0.995193	0.993897	0.992221	0.988885	0.999999
$C(0.2, 0.3)$	0.99997	0.9996	0.997825	0.992536	0.999999
$C(0.2, 0.5)$	0.99958	0.998682	0.996403	0.991218	0.999999
$C(0.2, 0.7)$	0.997626	0.996214	0.993917	0.989531	0.999999
$C(0.2, 0.9)$	0.991601	0.990933	0.989962	0.98744	0.99999
$C(0.3, 0.4)$	0.99985	0.999141	0.99685	0.991414	0.999999
$C(0.3, 0.6)$	0.998951	0.997656	0.995025	0.989962	0.999999
$C(0.3, 0.8)$	0.995461	0.994085	0.991965	0.988123	0.999999
$C(0.4, 0.5)$	0.99951	0.998343	0.99558	0.990177	0.999999
$C(0.4, 0.7)$	0.997715	0.996085	0.993295	0.988582	0.999999
$C(0.4, 0.9)$	0.992073	0.991149	0.989599	0.986582	0.99999
$C(0.5, 0.6)$	0.998742	0.997049	0.993957	0.988816	0.999999
$C(0.5, 0.8)$	0.99557	0.993809	0.991149	0.987079	0.999999
$C(0.6, 0.7)$	0.997218	0.995114	0.991926	0.987323	0.999999
$C(0.6, 0.9)$	0.992152	0.990678	0.988543	0.985426	0.99999
$C(0.7, 0.8)$	0.994589	0.992359	0.989433	0.985688	0.99999
$C(0.8, 0.9)$	0.990423	0.988582	0.986427	0.983903	0.99999

表 5

b_1 b_2	0.3			0.2	
	0.0	0.1	0.2	0.0	0.1
$C(0.1, 0.2)$	0.999999	0.99991	0.998981	0.999999	0.99996
$C(0.1, 0.4)$	0.99997	0.99975	0.998652	0.999999	0.99992
$C(0.1, 0.6)$	0.99975	0.99932	0.998193	0.99997	0.99986
$C(0.1, 0.8)$	0.998881	0.998422	0.997546	0.99986	0.99975
$C(0.2, 0.3)$	0.99999	0.99982	0.998722	0.999999	0.99993
$C(0.2, 0.5)$	0.99991	0.99956	0.998343	0.99999	0.99989
$C(0.2, 0.7)$	0.99946	0.998941	0.997805	0.99993	0.99981
$C(0.2, 0.9)$	0.998004	0.997715	0.997069	0.99975	0.99967
$C(0.3, 0.4)$	0.99997	0.99967	0.998413	0.999999	0.9999
$C(0.3, 0.6)$	0.99976	0.999271	0.997974	0.99997	0.99984
$C(0.3, 0.8)$	0.998931	0.998413	0.997357	0.99987	0.99974
$C(0.4, 0.5)$	0.99989	0.99943	0.998054	0.99999	0.99986
$C(0.4, 0.7)$	0.99947	0.998851	0.997546	0.99993	0.99978
$C(0.4, 0.9)$	0.998084	0.997685	0.99684	0.99976	0.99965
$C(0.5, 0.6)$	0.9997	0.999071	0.997646	0.99996	0.9998
$C(0.5, 0.8)$	0.998931	0.998263	0.997049	0.99986	0.9997
$C(0.6, 0.7)$	0.99933	0.998552	0.997158	0.99991	0.99973
$C(0.6, 0.9)$	0.998054	0.997466	0.996492	0.99975	0.9996
$C(0.7, 0.8)$	0.998652	0.997825	0.996612	0.99982	0.99963
$C(0.8, 0.9)$	0.997546	0.99685	0.995976	0.99967	0.99951

表 6

b_1	0.5				
b_2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$C(0.1, 0.2)$	0.100902	0.108871	0.118411	0.128259	0.139406
$C(0.1, 0.4)$	0.100006	0.100475	0.103811	0.117805	0.166573
$C(0.1, 0.6)$	0.100000	0.100018	0.100406	0.105356	0.159787
$C(0.1, 0.8)$	0.100000	0.100001	0.100043	0.101579	0.149007
$C(0.2, 0.3)$	0.203480	0.210716	0.219045	0.228464	0.239664
$C(0.2, 0.5)$	0.200052	0.200713	0.204185	0.218448	0.268961
$C(0.2, 0.7)$	0.200001	0.200029	0.200474	0.205956	0.265856
$C(0.2, 0.9)$	0.200000	0.200001	0.200066	0.202220	0.260115
$C(0.3, 0.4)$	0.305733	0.311950	0.319508	0.328702	0.340015
$C(0.3, 0.6)$	0.300128	0.300912	0.304518	0.319386	0.372326
$C(0.3, 0.8)$	0.300002	0.300042	0.300575	0.307111	0.374860
$C(0.4, 0.5)$	0.407264	0.412759	0.419881	0.429030	0.440498
$C(0.4, 0.7)$	0.400203	0.401075	0.404913	0.420997	0.477101
$C(0.4, 0.9)$	0.400004	0.400064	0.400820	0.409739	0.488214
$C(0.5, 0.6)$	0.508217	0.513312	0.520272	0.529554	0.541165
$C(0.5, 0.8)$	0.500270	0.501261	0.505633	0.524167	0.583832
$C(0.6, 0.7)$	0.608820	0.613806	0.620878	0.630485	0.642075
$C(0.6, 0.9)$	0.600377	0.601712	0.607611	0.631124	0.693083
$C(0.7, 0.8)$	0.709421	0.714647	0.722191	0.732259	0.743282
$C(0.8, 0.9)$	0.811129	0.817276	0.825700	0.835662	0.844800

表 7

b_1 b_2	0.4				0.1
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.0
$C(0.1, 0.2)$	0.101167	0.113813	0.126691	0.138470	0.102415
$C(0.1, 0.4)$	0.100014	0.101851	0.114700	0.159282	0.100145
$C(0.1, 0.6)$	0.100000	0.100160	0.103839	0.144624	0.100020
$C(0.1, 0.8)$	0.100000	0.100013	0.100848	0.126566	0.100004
$C(0.2, 0.3)$	0.204571	0.215762	0.227153	0.238531	0.209426
$C(0.2, 0.5)$	0.200131	0.202555	0.215509	0.259643	0.201499
$C(0.2, 0.7)$	0.200004	0.200240	0.204151	0.245157	0.200287
$C(0.2, 0.9)$	0.200000	0.200021	0.200937	0.227088	0.200070
$C(0.3, 0.4)$	0.307655	0.317154	0.327518	0.338590	0.315763
$C(0.3, 0.6)$	0.300350	0.303167	0.316182	0.360007	0.304497
$C(0.3, 0.8)$	0.300012	0.300315	0.304428	0.345725	0.301103
$C(0.4, 0.5)$	0.409883	0.418148	0.427810	0.438649	0.420497
$C(0.4, 0.7)$	0.400598	0.403667	0.416755	0.460392	0.408588
$C(0.4, 0.9)$	0.400023	0.400384	0.404693	0.446361	0.402541
$C(0.5, 0.6)$	0.511397	0.518857	0.528049	0.538711	0.523982
$C(0.5, 0.8)$	0.500818	0.504068	0.517275	0.560816	0.513141
$C(0.6, 0.7)$	0.612397	0.619368	0.628259	0.638779	0.626597
$C(0.6, 0.9)$	0.600996	0.604407	0.617805	0.661306	0.617730
$C(0.7, 0.8)$	0.713057	0.719761	0.728464	0.738857	0.728610
$C(0.8, 0.9)$	0.813550	0.820131	0.828702	0.838951	0.830195

表 8

b_1 b_2	0.3			0.2	
	0.0	0.1	0.2	0.0	0.1
$C(0.1,.0.2)$	0.101499	0.121561	0.137379	0.133368	0.10191
$C(0.1,.0.4)$	0.100032	0.107818	0.15356	0.1363	0.100069
$C(0.1,.0.6)$	0.100001	0.101601	0.137469	0.119929	0.100006
$C(0.1,.0.8)$	0.1	0.100305	0.120886	0.109256	0.100001
$C(0.2,.0.3)$	0.20591	0.22317	0.237555	0.234091	0.207522
$C(0.2,.0.5)$	0.200312	0.209604	0.254444	0.239012	0.200702
$C(0.2,.0.7)$	0.200019	0.202118	0.238512	0.222333	0.200078
$C(0.2,.0.9)$	0.200001	0.200421	0.221657	0.210691	0.200011
$C(0.3,.0.4)$	0.309971	0.324403	0.33771	0.334702	0.31268
$C(0.3,.0.6)$	0.300886	0.311189	0.355233	0.341439	0.302073
$C(0.3,.0.8)$	0.300065	0.302615	0.339455	0.324594	0.300288
$C(0.4,.0.5)$	0.413004	0.425359	0.437848	0.435224	0.41657
$C(0.4,.0.7)$	0.401605	0.412561	0.455939	0.443609	0.403899
$C(0.4,.0.9)$	0.400134	0.403073	0.440309	0.426706	0.40064
$C(0.5,.0.6)$	0.515183	0.526105	0.537969	0.535673	0.519433
$C(0.5,.0.8)$	0.502329	0.513725	0.55657	0.54555	0.505881
$C(0.6,.0.7)$	0.616741	0.626691	0.638077	0.636062	0.621561
$C(0.6,.0.9)$	0.602975	0.6147	0.657135	0.647285	0.607818
$C(0.7,.0.8)$	0.717853	0.727153	0.738173	0.7364	0.72317
$C(0.8,.0.9)$	0.818646	0.827518	0.838258	0.836695	0.824403

表 9

これらの表から読み取れるように n が大きくなっても損失の期待値は、やはり b_1 に関しては単調減少、 b_2 に関しては単調増加となっていることが分かる。このことは更に大きな n についても成り立つと考えて差支えない。

以上の結果を前節のそれと比較すると、まず b_1 については収束速度および損失の期待値の両面から考えても、その値をできる限り大きくすべきである。つまり

$$b_1 = 1/2$$

が最適である。

一方 b_2 については収束速度を上げようとするとその値を大きくする必要があり、損失の期待値を下げようとするとその値を小さくする必要がある。この関係を見るため、 $C = C(0.8, 0.3)$ なる環境下での収束速度および損失の期待値を $n = 5$ 、 $b_1 = 0.5$ として、 b_2 の値の変化に関してグラフに表したものが図3である。

また、 n をさらに大きくしていくと b_2 の値を

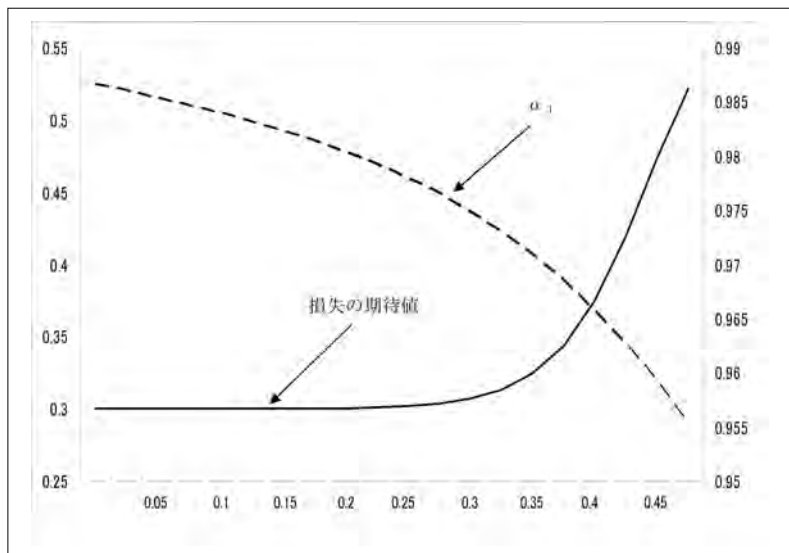


図 3

$$b_2 = 0.4$$

程度以下に抑えると、ほぼすべての環境において損失の期待値を最小値に近づけることができることを確かめることができる。表 10 に、 $b_1 = 0.5$, $b_2 = 0.4$ としたときの様々な環境において n を大きくしていったときの損失の期待値の変化を示しておく。

n	6	8	10	12	14
$C (0.1, 0.2)$	0.134475	0.123703	0.113792	0.106704	0.102738
$C (0.1, 0.4)$	0.139131	0.108799	0.101198	0.100105	0.100006
$C (0.1, 0.6)$	0.12217	0.101544	0.100051	0.100001	0.100000
$C (0.1, 0.8)$	0.112035	0.100274	0.100002	0.100000	0.100000
$C (0.2, 0.3)$	0.234665	0.223726	0.213694	0.206579	0.202648
$C (0.2, 0.5)$	0.240529	0.208958	0.201184	0.2001	0.200006
$C (0.2, 0.7)$	0.224802	0.201686	0.200053	0.200001	0.200000
$C (0.2, 0.9)$	0.216147	0.2004	0.200003	0.200000	0.200000
$C (0.3, 0.4)$	0.334953	0.323821	0.313638	0.306474	0.302566
$C (0.3, 0.6)$	0.342755	0.309318	0.301195	0.300097	0.300005
$C (0.3, 0.8)$	0.329485	0.302017	0.30006	0.300001	0.300000
$C (0.4, 0.5)$	0.435395	0.424037	0.413655	0.406404	0.402499
$C (0.4, 0.7)$	0.446422	0.410082	0.401255	0.400098	0.400005
$C (0.4, 0.9)$	0.438241	0.402925	0.400087	0.400001	0.400000
$C (0.5, 0.6)$	0.536085	0.52447	0.513805	0.506399	0.502458
$C (0.5, 0.8)$	0.552651	0.511798	0.501434	0.500107	0.500005
$C (0.6, 0.7)$	0.637181	0.62533	0.614227	0.606525	0.602467
$C (0.6, 0.9)$	0.66336	0.616286	0.602049	0.600149	0.600007
$C (0.7, 0.8)$	0.738913	0.727139	0.715314	0.706978	0.702601
$C (0.8, 0.9)$	0.841526	0.831238	0.818649	0.808678	0.803224

表 10

本稿ではオートマトン $D_{n,k}$ を取り上げ、このオートマトンのランダム媒体への適応する姿を、その収束速度を中心に考察した。適応的なオートマトンや適応的なシステムはこの $D_{n,k}$ 以外にも様々な形のものが提案されている。これらに対する考察はまた稿を改めて行いたい。

参考文献

- [F-1] Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and its Application, John Wiley & Sons 1957 ; 河田龍夫監訳：確率論とその応用，上，下 紀伊国屋 1961
- [H-1] Howard, R. A. : Dynamic Programming and Markov Processes, M.I.T. Press 1960 ; 関根智明他訳：ダイナミックプログラミングとマルコフ過程 培風館 1971
- [T-1] 竹内昭浩：人間行動とオートマトン 白桃書房 1984
- [T-2] 竹内昭浩：「適応的システムと確率的環境の相互作用」和歌山大学経済学会『研究年報』 14, pp.533–542 2010
- [T-3] Tsetlin, M. L. : “On the behavior of finite automata in random media”, Automation and Remote Control, 22, pp.1345–1354 1961
- [Y-1] 柳井浩：z変換とその応用 日科技連 1988